CAPITOLO 3

Alcuni altri aspetti

Questo capitolo conclusivo è dedicato all'esposizione di alcuni risultati riguardanti argomenti della teoria degli FC-gruppi o ad essa correlati che non sono stati trattati nei capitoli precedenti, ma che sono stati oggetto di ricerche, anche se non ancora conclusive od organiche. Non saranno riportate dimostrazioni, in quanto questi brevi cenni vanno intesi soltanto come possibili spunti per ulteriori sviluppi. Occorre precisare che si è scelto di non fare alcun riferimento alla teoria delle formazioni e delle classi di Fitting nell'universo degli FC-gruppi localmente risolubili, la cui trattazione ci avrebbe portato molto lontano dallo scopo originario di questi appunti.

1. Gruppi con molti FC-sottogruppi

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, un gruppo G si dice *minimale non-*$\mathfrak{X}$ se non appartiene a $\mathfrak{X}$ ma tutti i suoi sottogruppi propri sono $\mathfrak{X}$-gruppi. La struttura dei gruppi minimali non-$\mathfrak{X}$ è stata studiata per numerose scelte della classe $\mathfrak{X}$. Nell'analisi dei gruppi che hanno in qualche senso molti sottogruppi con la proprietà FC, la prima situazione da esaminare è ovviamente quella dei gruppi minimali non-FC. Nel caso non perfetto la struttura di questi gruppi è pienamente descritta dal prossimo risultato.

Teorema 3.1. (V.V. Belyaev e N.F. Sesekin [**13**]) *Sia G un gruppo con il derivato proprio. Allora G è minimale non-FC se e soltanto se G è un gruppo di Černikov il cui derivato coincide con il residuale finito e non ha sottogruppi G-invarianti infiniti propri e inoltre $G = \langle x, G' \rangle$, dove $x^{p^n} \in G'$ e $x^p \in Z(G)$ per qualche numero primo p.*

Ovviamente ogni gruppo di Tarski è minimale non-FC, per cui esistono gruppi perfetti e minimali non-FC. D'altra parte V.V. Belyaev [**11**] ha dimostrato che un gruppo perfetto localmente finito non può essere minimale non-BFC, sicchè in particolare il Teorema 3.1 caratterizza completamente i gruppi localmente finiti e minimali non-BFC. E' stato inoltre provato da B. Bruno e R.E. Phillips [**14**] che un qualunque gruppo minimale non-FC è numerabile, e che ogni localmente graduato e minimale non-FC è localmente finito, ma non è noto se esistono gruppi minimali non-FC che siano perfetti e localmente finiti. E' importante osservare che V.V. Belyaev [**10**] ha dimostrato che se G è un gruppo perfetto localmente finito e minimale non-FC, allora $G/Z(G)$ è semplice oppure G è un p-gruppo per qualche numero primo p; d'altra parte, poichè M. Kuzucuoğlu e R.E. Phillips [**74**] hanno provato che non esistono gruppi semplici localmente finiti e minimali non-FC, si deduce che un eventuale gruppo perfetto localmente finito e minimale non-FC deve essere un p-gruppo per qualche numero primo p.

In questo ambito sono stati considerati pure gruppi soggetti a restrizioni sulle catene di sottogruppi che non hanno la proprietà FC. Per quanto riguarda la condizione minimale è stato ottenuto il seguente risultato, il quale assicura che, almeno nel caso risolubile, soltanto le situazioni estreme possono verificarsi.

TEOREMA 3.2. (S. Franciosi, F. de Giovanni e Y.P. Sysak [**45**]) *Sia G un gruppo risolubile che verifica la condizione minimale sui sottogruppi che non hanno la proprietà FC. Allora G è un FC-gruppo oppure un gruppo di Černikov.*

Si osservi che nell'enunciato precedente l'ipotesi di risolubilità può essere indebolita supponendo il gruppo G soltanto dotato di una serie normale discendente i cui fattori sono abeliani oppure finiti.

Anche i gruppi a condizione massimale sui sottogruppi che non hanno la proprietà FC sono stati studiati; rispetto al caso precedente, il comportamento di questi gruppi è più complesso ed è stato descritto da M.R. Dixon e L.A. Kurdachenko ([**38**],[**39**]).

Se $\mathfrak{X}$ è una classe di gruppi, un gruppo G si dice *just-non-$\mathfrak{X}$* se non appartiene a $\mathfrak{X}$ ma ogni suo quoziente proprio è un $\mathfrak{X}$-gruppo. I gruppi just-non-$\mathfrak{X}$ sono stati investigati per numerose scelte della classe $\mathfrak{X}$. In particolare S. Franciosi, F. de Giovanni e L.A. Kurdachenko [**44**] hanno studiato la struttura dei gruppi just-non-FC.

2. Gruppi con molti FC-elementi

E' stato provato da Y.N. Gorčinskiĭ [**57**] che se G è un qualunque gruppo per il quale l'insieme dei periodi degli elementi è finito, allora G si può immergere in un gruppo con un numero finito di classi di coniugio. Pertanto la struttura dei gruppi con un numero finito di classi di coniugio può essere molto complicata; d'altra parte è chiaro che un gruppo con tale proprietà ha soltanto un numero finito di sottogruppi normali e quindi in particolare è finito se è risolubile.

Lo studio dei gruppi con un numero finito di classi di coniugio infinite è stato iniziato da A.V. Izosov e N.F. Sesekin ([**65**],[**64**]) considerando il caso dei gruppi in cui tutti gli elementi che non sono FC-centrali giacciono in un'unica classe di coniugio e quindi quello dei gruppi con esattamente due classi di coniugio infinite. Recentemente M. Herzog, P. Longobardi e M. Maj [**61**] hanno ottenuto ulteriori informazioni sulla struttura dei gruppi con restrizioni sul numero delle classi di coniugio infinite.

Sia G un gruppo che ha soltanto un numero finito di classi di coniugio infinite, e siano F l'FC-centro di G e $x_1, \ldots, x_k$ rappresentanti (mutuamente non coniugati) delle classi di coniugio infinite di G. Poichè la classe di coniugio di x_i è ovviamente contenuta nel laterale x_iG', si ha

$$G = F \cup x_1G' \cup \ldots \cup x_kG',$$

e quindi dal Teorema 1.22 segue che G è un FC-gruppo oppure il suo derivato G' ha indice finito.

Teorema 3.3. (M. Herzog - P. Longobardi - M. Maj [**61**]) *Sia G un gruppo periodico localmente graduato con un numero finito di classi di coniugio infinite. Allora G è un FC-gruppo oppure è nilpotente-per-finito.*

Si osservi che, nella situazione dell'enunciato precedente, l'FC-centro di G deve avere necessariamente indice finito. Infatti, se G non è un FC-gruppo esiste in G un sottogruppo normale nilpotente H di indice finito; poichè ogni classe di coniugio in G costituita da elementi di H si decompone nell'unione di un numero finito di classi di coniugio di H, anche H ha un numero finito di classi di coniugio infinite e allora H è un FC-gruppo, in quanto l'indice $|H : H'|$ è infinito (perchè H è nilpotente e infinito).

A.V. Izosov e N.F. Sesekin [**66**] hanno anche descritto il comportamento dei gruppi con un numero finito di classi di coniugio infinite di sottogruppi, provando tra l'altro che ogni gruppo con questa proprietà ha un numero finito di classi di coniugio infinite di elementi.

3. FC^k-gruppi

Sia FC^0 la classe di tutti i gruppi finiti e per ogni numero intero non negativo n, supposta definita la classe FC^n, si consideri induttivamente la classe FC^{n+1} costituita da tutti i gruppi G tali che $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ ha la proprietà FC^n per ogni elemento x di G. Si è così costruita induttivamente una successione di classi gruppali che generalizzano quella degli FC-gruppi, in quanto quest'ultima coincide evidentemente con la classe FC^1. In [**50**] vari risultati di base sui gruppi con classi di coniugio finite sono stati opportunamente estesi agli FC^k-gruppi per un arbitrario numero intero positivo k; qui ci si limterà ad enunciare alcuni dei risultati ottenuti. In questo ambito è importante in primo luogo il seguente risultato generale sulla struttura degli FC^k-gruppi.

TEOREMA 3.4. (F. de Giovanni, A. Russo e G. Vincenzi [**50**]) *Sia G un FC^k-gruppo. Allora il k-esimo termine $\gamma_k(G)$ della serie centrale inferiore di G è contenuto nell'FC-centro di G.*

COROLLARIO 3.5. *Sia G un FC^k-gruppo. Allora il sottogruppo $\gamma_{k+1}(G)$ è periodico. In particolare un FC^k-gruppo senza torsione è nilpotente di classe al più k e in un qualunque FC^k-gruppo l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo.*

Per quanto riguarda l'estensione del Teorema 1.3 alla classe dei gruppi con la proprietà FC^k, si ha:

TEOREMA 3.6. (F. de Giovanni, A. Russo e G. Vincenzi [**50**]) *Sia G un FC^k-gruppo finitamente generato. Allora il gruppo quoziente $G/Z_k(G)$ è finito.*

Ulteriori risultati sui gruppi nella classe FC^k sono stati ottenuti recentemente; in particolare il prossimo teorema riguarda gli FC^k-gruppi (residualmente finiti) in cui ogni sottogruppo è chiuso nella topologia profinita.

TEOREMA 3.7. (D.J.S. Robinson, A. Russo e G. Vincenzi [**98**]) *Sia G un FC^k-gruppo in cui ogni sottogruppo è intersezione di sottogruppi di indice finito. Allora il gruppo quoziente $G/Z_k(G)$ è al più numerabile.*

Nello stesso articolo gli autori hanno anche costruito alcuni interessanti esempi di FC^k-gruppi, provando in particolare che esiste un FC^2-gruppo che non si può immergere in alcun prodotto diretto di un gruppo periodico e di un gruppo senza torsione (in contrasto con quanto avviene nel caso degli FC-gruppi).

4. Automorfismi ed FC-gruppi

Se G è un gruppo e x è un elemento di G, la classe di coniugio di x in G coincide evidentemente con l'insieme delle immagini di x mediante gli automorfismi interni di G. Sostituendo gli automorfismi interni con gli automorfismi arbitrari, vari problemi sugli FC-gruppi vengono tradotti in altrettante questioni riguardante l'azione dell'automorfo sul gruppo. Il Teorema 1.20 caratterizza i gruppi in cui le classi di coniugio di elementi sono finite e hanno ordine limitato. Per quanto riguarda il caso degli automorfismi sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 3.8. (D.J.S. Robinson e J. Wiegold [**100**]) *In un gruppo G ogni elemento ha un numero finito e limitato di immagini mediante automorfismi se e soltanto se il sottogruppo T costituito dagli elementi periodici di $Z(G)$ è finito e $AutG$ induce su G/T un gruppo finito di automorfismi.*

In analogia al problema risolto da B.H. Neumann con il Teorema 2.11 per i gruppi con classi di coniugio finite di sottogruppi, Robinson e Wiegold hanno anche considerato i gruppi in cui ogni sottogruppo ha un numero finito e limitato di immagini mediante automorfismi. Il loro risultato è stato in seguito migliorato provando che anche in questo caso la limitazione sul numero delle immagini può essere omessa.

TEOREMA 3.9. (J.C. Lennox, F. Menegazzo, H. Smith e J. Wiegold [**77**]) *In un gruppo ogni sottogruppo ha un mumero finito di immagini mediante automorfismi se e soltanto se $AutG$ è finito oppure $G = G_1 \times G_2$, dove G_1 è un gruppo periodico localmente ciclico, G_2 è un'estensione centrale finita del prodotto diretto di un numero finito di gruppi di Prüfer e $\pi(G_1) \cap \pi(G_2) = \emptyset$.*

Un automorfismo α di un gruppo G si dice *virtualmente triviale* se il sottogruppo

$$C_G(\alpha) = \{x \in G \mid x^\alpha = x\}$$

ha indice finito in G. Allora un gruppo G ha la proprietà FC se e soltanto se ogni suo automorfismo interno è virtualmente triviale, ed il prossimo risultato è quindi naturalmente correlato alla teoria.

TEOREMA 3.10. (F. Menegazzo e D.J.S. Robinson [**81**]) *Sia G un gruppo i cui automorfismi sono tutti virtualmente triviali. Allora G' è finito e $Z(G)$ è un gruppo ridotto a componenti primarie finite.*

Ulteriori informazioni sui gruppi con tutti gli automorfismi virtualmente triviali possono essere trovate in [**82**].

E' ben noto che la struttura dei gruppi che possono essere realizzati come gruppo di tutti gli automorfismi di qualche gruppo è soggetta a forti restrizioni; ad esempio D.J.S. Robinson [**95**] ha dimostrato che un qualunque gruppo di Černikov infinito non può essere isomorfo all'automorfo di alcun gruppo. Il prossimo risultato prova in particolare che un FC-gruppo periodico numerabile di esponente infinito che sia privo di elementi di periodo 2 non è realizzabile come gruppo di tutti gli automorfismi di un gruppo.

Teorema 3.11. (J. Zimmerman [**121**]) *Sia G un gruppo il cui automorfo $AutG$ è un FC-gruppo periodico numerabile. Se l'insieme $\pi(AutG)$ è finito oppure i 2-sottogruppi di $AutG$ verificano la condizione minimale, allora il gruppo $G/Z(G)$ è finito ed $AutG$ ha esponente finito e contiene un sottogruppo di indice finito Γ tale che $\pi(\Gamma) \subseteq \{2, 3\}$.*

Lo stesso autore ha ottenuto in [**122**] altre restrizioni sulla struttura degli FC-gruppi con questa proprietà. Per quanto riguarda i CC-gruppi, si ha:

Teorema 3.12. (M.R. Dixon [**37**]) *Sia G un gruppo il cui automorfo $AutG$ è un CC-gruppo periodico numerabile. Allora $AutG$ è un FC-gruppo.*

5. Il sottogruppo di Frattini

Qualunque sia il gruppo G, con il simbolo $\Phi(G)$ si denota il *sottogruppo di Frattini* di G, cioè l'intersezione di tutti i sottogruppi massimali di G (ponendo altresì $\Phi(G) = G$ se G è privo di sottogruppi massimali). Le proprietà ed il ruolo del sottogruppo di Frattini nell'ambito dei gruppi finiti sono ben noti; ad esempio, già nel 1885 G. Frattini [**52**] aveva provato che il sottogruppo di Frattini di un gruppo finito è nilpotente, ed è anche immediato osservare che un gruppo finito G è nilpotente se e soltanto se il suo derivato è contenuto in $\Phi(G)$. Molto più difficile risulta lo studio del sottogruppo di Frattini di un gruppo infinito e molto più debole l'influenza del comportamento di $\Phi(G)$ sulla struttura di un arbitrario gruppo G. D'altra parte, l'imposizione di opportune condizioni finitarie sul gruppo permette in varie situazioni di studiare il sottogruppo di Frattini; questo è il caso dei gruppi risolubili finitamente generati, come provato da J.C. Lennox in una serie di articoli degli anni settanta, tra i quali ci si limita qui a menzionare il lavoro [**76**]. Anche nell'universo dei gruppi con classi di coniugio finite è possibile sviluppare una "buona" teoria di Frattini.

Teorema 3.13. (A.M. Trahtenberg [**117**]) *Se G è un FC-gruppo, allora il suo sottogruppo di Frattini $\Phi(G)$ è localmente nilpotente. Inoltre G è localmente nilpotente se e soltanto se G' è contenuto in $\Phi(G)$.*

Il teorema precedente è stato esteso al caso dei PC-gruppi da L.A. Kurdachenko e J. Otal [**71**]; inoltre per i PC-gruppi, sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 3.14. (S. Franciosi e F. de Giovanni [**41**]) *Sia G un PC-gruppo. Se $G/\Phi(G)$ è finito (risp.: periodico), anche il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito (risp.: periodico).*

Si osservi che in [**41**] sono stati dimostrati risultati analoghi se il PC-gruppo G è tale che $G/\Phi(G)$ abbia rango sezionale oppure rango senza torsione finito.

6. Classi di Dietzmann

Una classe $\mathfrak{X}$ di gruppi si dice una *classe di Dietzmann* se ogni volta che per un elemento x di un gruppo G i gruppi $\langle x\rangle$ e $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ appartengono a $\mathfrak{X}$ anche la chiusura normale $\langle x\rangle^G$ di $\langle x\rangle$ in G è un $\mathfrak{X}$-gruppo. Allora il lemma di Dietzmann può essere enunciato affermando che la classe $\mathfrak{F}$ dei gruppi finiti è una classe di Dietzmann, ed è ovviamente da tale considerazione che nasce l'interesse per queste classi gruppali. Anche la classe $\mathfrak{A}$ dei gruppi abeliani è una classe di Dietzmann. Infatti, se x è un elemento di un gruppo G tale che il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ sia abeliano, il derivato G' di G è contenuto in $C_G(\langle x\rangle^G)$ e quindi $G' \leq C_G(x^g)$ per ogni $g \in G$; allora due qualunque coniugati di x sono permutabili e perciò il sottogruppo $\langle x\rangle^G$ è abeliano. Più in generale, per ogni numero intero positivo n i gruppi nilpotenti di classe al più n costituiscono una classe di Dietzmann. Le classi di Dietzmann sono state introdotte e studiate da R. Maier e J.R. Rogé rio ([**80**],[**78**],[**79**]). Tra gli altri risultati ottenuti è stato provato che la classe degli FC-gruppi è una classe di Dietzmann e tale è anche la classe dei gruppi con il derivato finito. Al contrario, i gruppi contenenti un sottogruppo abeliano di indice finito non formano una classe di Dietzmann, e non sono classi di Dietzmann neppure quelle determinate da importanti condizioni finitarie quali la classe dei gruppi di Černikov e quella dei gruppi policiclici. Un altro risultato interessante assicura che per ogni numero cardinale infinito $\aleph$ i gruppi con cardinalità al più $\aleph$ riempiono una classe di Dietzmann. Infine, se $\mathfrak{X}$ è una qualunque classe di Dietzmann, si può dimostrare che anche la classe dei gruppi localmente $\mathfrak{X}$ è di Dietzmann e tale è anche la classe $Z\mathfrak{X}$ costituita dai gruppi G tali che $G/Z(G)$ sia un $\mathfrak{X}$-gruppo; in particolare, la classe dei gruppi con il centro di indice finito è di Dietzmann.

Una classe gruppale $\mathfrak{X}$ si dice una *classe di Schur* se per ogni gruppo G tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia un $\mathfrak{X}$-gruppo, anche il derivato G' di G appartiene a $\mathfrak{X}$. Il teorema di Schur afferma allora semplicemente che la classe $\mathfrak{F}$ dei gruppi finiti è una classe di Schur, mentre il Teorema 2.1 assicura che anche la classe dei gruppi di Černikov è di Schur; non è difficile provare che i gruppi policiclici (o similmente quelli policiclici-per-finiti) formano una classe di Schur (si veda ad esempio [**94**] Part 1, p.115). Altri esempi di classi di Schur determinate da restrizioni sui ranghi sono stati ottenuti in [**42**]. Le classi di Schur sono state studiate anche in [**78**], dove in particolare è stato dimostrato che i gruppi con il derivato finito formano una classe di Schur e che, se $\mathfrak{X}$ è una classe di Schur chiusa rispetto a sottogruppi e quozienti, allora anche la classe dei gruppi localmente $\mathfrak{X}$ e la classe $Z\mathfrak{X}$ sono di Schur. Si osservi infine che non è noto se esistono classi di Dietzmann che non siano classi di Schur.

7. Gruppi inerziali

Un sottogruppo X di un gruppo G si dice *inerte* se l'indice $|X : X \cap X^g|$ è finito per ogni elemento g di G. Evidentemente ogni sottogruppo normale-per-finito (ed in particolare ogni sottogruppo normale) di un gruppo arbitrario è inerte; non è difficile provare che i sottogruppi quasinormali di un gruppo arbitrario sono inerti (cfr. [**97**]). Il gruppo G si dice *inerziale* se tutti i suoi sottogruppi sono inerti. Ovviamente tutti i gruppi finiti e tutti i gruppi di Tarski sono inerziali, mentre nel caso dei gruppi localmente finiti si ha:

Teorema 3.15. (V.V. Belyaev, M. Kuzucuoğlu e E. Seckin [**12**]) *Sia G un gruppo inerziale infinito localmente finito. Allora G non è semplice.*

La classe dei gruppi inerziali contiene tutti i gruppi con classi di coniugio finite. Infatti, sia G un FC-gruppo e sia X un qualunque sottogruppo di G; se g è un elemento di G, il centralizzante $C_G(g)$ ha indice finito in G, e quindi $X \cap C_G(g)$ è un sottogruppo di indice finito in X, che è banalmente contenuto in $X \cap X^g$. Pertanto X è inerte in G, e G è un gruppo inerziale. D'altra parte la considerazione del gruppo diedrale infinito prova che esistono gruppi inerziali che non sono FC-gruppi. Più in generale, risulta inerziale ogni *gruppo diedrale generalizzato*, cioè ogni prodotto semidiretto della forma $\langle x \rangle \ltimes A$, dove x è un elemento di periodo 2, A è un gruppo abeliano e $a^x = a^{-1}$ per ogni elemento a di A. Il prossimo risultato dimostra che i gruppi diedrali generalizzati compaiono frequentemente nella struttura dei gruppi inerziali.

Teorema 3.16. (D.J.S. Robinson [**97**]) *Sia G un gruppo risolubile privo di sottogruppi normali periodici non identici. Allora G è inerziale se e soltanto se è abeliano oppure diedrale generalizzato.*

Il Teorema 3.16 assicura in particolare che ogni gruppo inerziale risolubile è periodico-per-abeliano-per-finito. Nel caso finitamente generato i gruppi inerziali risolubili sono completamente descritti dall'ultimo risultato di questo paragrafo.

Teorema 3.17. (D.J.S. Robinson [**97**]) *Un gruppo risolubile finitamente generato G è inerziale se e soltanto se contiene un sottogruppo normale abeliano senza torsione di indice finito su cui ogni elemento di G induce un automorfismo potenza.*